

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/320146497>

A formulação de problemas na aprendizagem da probabilidade condicionada

Conference Paper · March 2017

CITATIONS

0

READS

19

4 authors, including:



Carla Santos

Polytechnic Institute of Beja, Department of Mathematics and Physical Sciences

25 PUBLICATIONS 44 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Cristina Dias

Instituto Politécnico de Portalegre

19 PUBLICATIONS 1 CITATION

[SEE PROFILE](#)



Maria José Varadinov

Instituto Politécnico de Portalegre

8 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



CNaPPES.16

Congresso Nacional de Práticas Pedagógicas
no Ensino Superior

CNaPPES 2016

**Congresso Nacional
de Práticas Pedagógicas
no Ensino Superior**

Lisboa, Portugal, 14 e 15 de julho de 2016

CNaPPES 2016 – Congresso Nacional de Práticas Pedagógicas no
Ensino Superior

Universidade de Lisboa, Portugal, 14 e 15 de julho de 2016

Coordenador da publicação

Patrícia Rosado Pinto

Editores

Fernando Remião | Universidade do Porto

José Fernando Oliveira | Universidade do Porto

Luís Castro | Universidade de Lisboa

Maria Amélia Ferreira | Universidade do Porto

Patrícia Rosado Pinto | Universidade Nova de Lisboa

Rita Cadima | Instituto Politécnico de Leiria

ISBN
978-989-98576-5-0

Março de 2017

A formulação de problemas na aprendizagem da probabilidade condicionada

Carla Santos[†]
Cristina Dias[‡]
Maria Varadinov[‡]
Baltazar Vaz[‡]

[†]Departamento de Matemática e Ciências Físicas do Instituto Politécnico de Beja
carla.santos@ipbeja.pt

[‡]Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Portalegre
cpsilvadias@gmail.com
dinov@estgp.pt
jbaltazarvaz@gmail.com

Resumo

Nos problemas de probabilidades condicionadas, a etapa de interpretação do enunciado origina, frequentemente, grandes dificuldades entre os alunos, despoletando diversos equívocos e falácias. A partir de um problema de probabilidades condicionadas de tipo 4, os alunos desenvolveram uma actividade de formulação de problemas, que lhes exigiu uma atenção mais pormenorizada sobre o processo de interpretação e desconstrução do enunciado, proporcionando-lhes uma oportunidade de desenvolver o raciocínio probabilístico no sentido da eliminação dos equívocos a ele associados.

Palavras-Chave: Formulação de problemas, probabilidades condicionadas, resolução de problemas.

1 Contexto

A necessidade de formação de indivíduos mais autónomos e críticos, capazes de resolver eficazmente os problemas com que se irão deparar na sua vida pessoal, social e profissional, e a evidência de que só um ensino contextualizado e com significado permite a conversão de conhecimentos em competências colocou a resolução de problemas no centro do processo de ensino-aprendizagem, da Matemática e de outras disciplinas. No caso da Estatística, esta nova abordagem direccionou o enfoque do seu ensino para a aquisição de competências relacionadas com o tratamento de dados, que se traduziu na inclusão da análise exploratória de dados e no uso de software para essa análise, tanto nos currículos do ensino superior como nos níveis anteriores. O desenvolvimento destas actividades, experimentais e computacionais, de análise de dados, foram também impulsionadoras duma nova visão do ensino das Probabilidades, com ênfase na sua natureza frequencista.

Apesar das recomendações para a renovação do ensino das Probabilidades, com o intuito do reforço da intuição e raciocínio probabilísticos dos alunos, em Portugal e noutros países, muitos alunos não têm oportunidade de experienciar situações que vão além da aplicação de algoritmos em exercícios rotineiros (Carvalho, 2006, Batanero e Díaz, 2012).

Seja consequência da inadequação da abordagem feita ao ensino das Probabilidades no ensino pré-superior, ou da frequente inaptidão dos alunos para a Matemática, identificada como um dos possíveis motivos para o insucesso nas unidades curriculares (u.c.) de Probabilidades e Estatística (p.e. Perney & Ravid, 1991), a realidade com que nos deparamos, nas u.c. destas áreas que leccionamos no ensino superior, revela que os alunos têm muitas dificuldades em lidar com problemas de probabilidades, em particular os que envolvem a probabilidade condicionada. O apuramento da probabilidade condicionada como um dos conceitos de probabilidades que mais equívocos provocam, entre os alunos, é corroborado por estudos de diversos autores, que reportaram também a probabilidade conjunta como outro dos conceitos que maiores dificuldades causam (p.e. Bar-Hillel e Falk, 1982, Polaki, 2005). Estudos de Estrada e Díaz (2006) e Correia et al. (2011) sustentam que essas dificuldades são transversais aos diversos graus de ensino.

As u.c. de Probabilidades e Estatística, que os alunos frequentam no ensino superior, constituirão, quase certamente, a última oportunidade para que estes adquiriram as competências necessárias para a adequada interpretação de informação de cariz probabilístico. É, portanto, de suma importância que os métodos de ensino-aprendizagem, adoptados nestas u.c., incluam estratégias que promovam uma aprendizagem significativa dos conceitos de probabilidades, no sentido da teoria de Ausubel (1976), e contribuam para um reforço dos raciocínio e intuição probabilísticos.

Existem evidências de que a aprendizagem assente em exercícios rotineiros e/ou descontextualizados, não só origina nos alunos uma aversão às probabilidades (Garfield e Ahlgren, 1988) como inviabiliza a eliminação dos equívocos associados aos conceitos de probabilidades (Khazanov, 2005, Konold, 1995). Para que os alunos tenham oportunidade de se consciencializar da complexidade do raciocínio probabilístico é essencial o seu envolvimento, mais activo, em actividades que proporcionem a construção do conhecimento com base no seu esforço, erros e interacção com os pares. (Garfield, 1995)

Em oposição ao carácter directo do processo de resolução de exercícios rotineiros encontra-se o carácter sinuoso do processo de resolução de problemas, assente na impossibilidade de aplicação imediata de um algoritmo que conduza à solução. Tirando partido desse carácter sinuoso e dos obstáculos que surgem ao longo do processo de resolução do problema é importante desenvolver actividades que abalem as crenças prévias dos alunos, contribuindo, dessa forma, para o desenvolvimento da intuição e do raciocínio probabilísticos (Konold, 1995).

Para a adequada interpretação do enunciado de qualquer problema matemático, são imprescindíveis os conhecimentos linguístico, semântico e esquemático (Mayer, 1992). No caso dos enunciados dos problemas de probabilidades, as exigências acentuam-se, no que concerne ao domínio do vocabulário, devido à frequente discrepância entre o significado comum e “probabilístico” de diversas expressões (Ancker, 2006). A fase de compreensão do enunciado e respectiva tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática é, de facto, a fase crítica do processo de resolução dos problemas de probabilidades, visto que, não sendo adequadamente consumada, potencia a manifestação das falácias probabilísticas e inviabiliza o alcance da solução correcta.

Silver (1994) define formulação de problemas como uma actividade de criação de novos problemas ou reformulação de problemas já existentes. Estas actividades, descritas na literatura como benéficas para o reforço da capacidade de resolução de problemas, contribuem para o aprofundamento da compreensão dos conceitos, a melhoria do raciocínio e o estímulo da motivação e da criatividade (p.e. English, 1996). Ao exigirem maior abstracção e requererem o uso adequado da linguagem natural e formal (Silver, 1994), as actividades de formulação de problemas poderão constituir um aliado na superação das dificuldades associadas à interpretação dos enunciados de probabilidades.

As investigações sobre a formulação de problemas em Matemática abordam, na sua maioria, o uso deste tipo de actividades na formação de futuros professores ou com alunos do ensino básico e secundário (p.e. Silver, 1994, English, 1996 e Solórzano, 2014). Estes trabalhos incidem sobre diversos conceitos matemáticos, contudo, os que concernam ao ensino de conceitos de probabilidades são raros (p.e. Penalva et al., 2010).

2 Descrição da prática pedagógica

Tendo como mote os conceitos que originam uma parte significativa das crenças erradas associadas ao raciocínio probabilístico, propusemos, aos alunos, tarefas de formulação de problemas em situações livres, semi-estruturadas e estruturadas, as três categorias estabelecidas pela classificação de Stoyanova e Ellerton (1996).

Atendendo à importância do conceito de probabilidade condicional, à enorme prevalência de equívocos e falácias associados a este conceito e à sua relevância para a compreensão de outros conceitos da Estatística (p.e. o nível de significância), as tarefas usadas no estudo continham vários cenários em torno deste conceito.

Neste artigo vamos debruçar-nos sobre uma das tarefas, que envolvia a formulação de um problema de probabilidades condicionadas, isto é, um problema em que, para a sua resolução, é necessário considerar a probabilidade condicionada de um acontecimento, que tanto pode estar presente nos dados como na(s) questão(ões) (Huerta e Lonjedo, 2003). A formulação do problema tinha como base uma situação estruturada, isto é, uma configuração que requeria o uso de estratégias previamente estabelecidas (Stoyanova e Ellerton, 1996). O cerne da tarefa é um problema, elaborado pelos autores deste estudo, com três acontecimentos, duas probabilidades simples e uma probabilidade condicionada (ou dados interpretáveis como tal), ou seja, um problema de probabilidades condicionadas de tipo 4, de acordo com a classificação de Yáñez (2000) em função da quantidade de probabilidades simples, conjuntas e condicionadas presentes na parte informativa do enunciado (dados). Com base nos dados fornecidos, os alunos deveriam formular questões que, para serem respondidas, exigissem o cálculo de uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada, e as resolvessem (ver Figura 1).

Num estudo, sobre o efeito dos medicamentos à base de paracetamol mais usados, PANORB e BENUR, foram observadas 100 pessoas, das quais 35 testemunharam o alívio dos sintomas na meia hora seguinte à toma do medicamento. Sabe-se ainda que, um quarto das pessoas observadas tinha tomado PANORB e que 11 destas pessoas testemunharam o alívio dos sintomas na meia hora seguinte à toma do medicamento.

Com base nos resultados obtidos no estudo, formule uma questão que exija o cálculo de:

- a) Uma probabilidade simples
- b) Uma probabilidade conjunta
- c) Uma probabilidade condicionada

Apresente a resolução das questões formuladas.

Figura 1. Tarefa proposta aos alunos

2.1 Objetivos e público-alvo

A tarefa de formulação de problemas teve como objectivo proporcionar, aos alunos, o desenvolvimento de actividades que exijam uma atenção mais pormenorizada sobre o

processo de interpretação e desconstrução dos enunciados de problemas de probabilidades, de forma a promover a eliminação dos equívocos a eles associados.

Neste estudo participaram 22 alunos do ensino superior politécnico que se encontravam a frequentar uma unidade curricular de Estatística, pertencente ao 1º ano do seu curso. Destes alunos, 20 são do sexo feminino e 4 nunca tinham estudado probabilidades antes da frequência desta unidade curricular.

2.2 Metodologia

A actividade foi realizada de forma colaborativa, em pares. Durante uma aula de 120 minutos, os onze pares de alunos elaboraram questões, para os diferentes itens propostos nas tarefas, e resolveram essas questões. No final da aula, os alunos entregaram, à docente, as suas produções escritas, relativas à formulação e resolução das questões. Estas produções escritas foram analisadas pela docente e devolvidas aos alunos na aula da semana seguinte. Nessa aula, foi feita a apresentação, para toda a turma, de algumas das questões formuladas pelos alunos. Cada uma das questões apresentadas serviu de mote para uma reflexão, em que entrevistaram alunos e docente, sobre as estratégias adoptadas na formulação das questões, a adequação e rigor dessas questões, os erros encontrados nas resoluções e as perspectivas dos alunos sobre a tarefa desenvolvida.

2.3 Avaliação

A análise dos registos escritos, produzidos pelos alunos, foi realizada tendo em conta a qualidade das questões formuladas, quanto à clareza, resolubilidade e rigor. As respostas, às questões formuladas, foram classificadas de acordo com a sua correcção e os tipos de erros cometidos.

As questões foram classificadas como:

- adequadas - quando foram formuladas de forma clara e rigorosa contendo todos os elementos essenciais ao objectivo a que se propunham, tanto em termos de linguagem como dos conceitos probabilísticos associados;
- parcialmente adequadas - quando, apesar de se conterem alguns dos elementos essenciais ao objectivo, incluíam imprecisões em termos de linguagem e/ou conceitos probabilísticos associados, por exemplo, desprezando o facto de o cálculo de probabilidades só poder ser realizado em situações aleatórias;
- inadequadas - quando apresentavam frases sem sentido, não conduziam ao objectivo proposto ou eram irresolúveis.

Para o cálculo de uma probabilidade simples verificou-se que a grande maioria das questões formuladas (9 questões, 81,8%) eram adequadas ou parcialmente adequadas. Para o cálculo de uma probabilidade conjunta, 6 das questões formuladas foram consideradas adequadas ou parcialmente adequadas. Das 5 questões classificadas como inadequadas, três apresentam frases sem sentido, as restantes duas, apesar de apresentarem uma formulação correcta, não conduziam ao objectivo proposto, uma vez que manifestavam a confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada. Para o cálculo de uma probabilidade condicionada verificou-se que 7 das 11 questões formuladas eram adequadas ou parcialmente adequadas. Nas questões classificadas como inadequadas inclui-se um caso que manifestava a confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada.

Relativamente à resolução das questões, analisaram-se apenas as respostas às questões que tinham sido classificadas como adequadas ou parcialmente adequadas. A questão relativa à probabilidade simples não criou grandes dificuldades, visto que todos os pares de alunos conseguiram responder à questão que tinham formulado. Para as questões que exigiam o cálculo de uma probabilidade conjunta apenas 2 das resoluções

estavam correctas. Das outras duas resoluções, 1 apresentava a confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada, 1 apresentava a confusão entre conjunção e disjunção de acontecimentos. Duas das questões formuladas, para o cálculo de uma probabilidade conjunta, não foram respondidas. Das respostas às questões que conduziam ao cálculo de uma probabilidade condicionada, 3 estavam correctas e 1 manifestava a falácia da condicional transposta. Três das questões formuladas, para o cálculo de uma probabilidade condicionada, não foram respondidas.

As reacções e comentários dos alunos, durante a execução da tarefa, foram revelando as dificuldades que estes experimentavam tanto na fase de formulação das questões como da sua resolução. Essas dificuldades foram destacadas pelos alunos aquando da reflexão sobre a actividade, tendo ficado claro que a etapa de formulação das questões, criou bastantes mais obstáculos e demorou muito mais tempo que a outra. Apesar de todos os obstáculos encontrados, os alunos revelaram sempre grande entusiasmo e interesse pela actividade, assim como grande empenho em concluir com sucesso as tarefas.

3 Transferibilidade

As actividades de formulação de problemas têm sido usadas em diferentes níveis de ensino e temas de estudo, pelo que o trabalho realizado é adaptável e reprodutível tanto para o ensino das probabilidades como noutros conteúdos.

4 Conclusões

As actividades de resolução de problemas de probabilidades proporcionam situações, indiscutivelmente, mais valiosas que a resolução de exercícios rotineiros, mas para que essas actividades contribuam para o efectivo desenvolvimento do raciocínio probabilístico, e a eliminação dos equívocos e falácias a ele associados, é necessário que os alunos sejam confrontados com situações que desafiem as suas crenças prévias, em que a construção do conhecimento assente no seu esforço e erros.

As tarefas de formulação de problemas que propusemos tiveram como objectivo principal propiciar, aos alunos, actividades estimulantes e desafiadoras que possam contribuir para a eliminação dos equívocos e crenças erradas associadas ao cálculo de probabilidades, obrigando a uma atenção mais pormenorizada sobre o processo de interpretação e desconstrução dos enunciados de problemas de probabilidades.

Apesar de serem evidentes as dificuldades e demora, dos alunos, na etapa de formulação das questões, verificou-se que a maioria dos pares conseguiu realizar com sucesso essa etapa da tarefa, o que indica que os alunos tiveram que dispensar tempo e atenção à leitura do enunciado. Não obstante, nas resoluções ocorreram algumas manifestações dos equívocos que, na literatura, são identificados como dos mais frequentes nos problemas de probabilidades condicionadas, a confusão entre probabilidade conjunta e condicionada e a falácia da condicional transposta, assim como uma elevada taxa de não respostas à questão que envolvia o cálculo de uma probabilidade condicionada, o que evidencia que as dificuldades associadas ao cálculo deste tipo de probabilidades são difíceis de superar.

5 Referências

- Ancker, J. (2006). The language of conditional probability. *Journal of Stat. Educ.*, Vol 14, No 2.
- Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México.
- Bar-Hillel, M. e Falk, R. (1982) Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition* Vol 11, pp. 109–22.

- Batanero, C. e Díaz, C. (2012) Training teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, Vol 3, No 1, pp. 3-13.
- Carvalho, C. (2006). Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal. In *Anais do SIPEMAT. Recife – Universidade Federal de Pernambuco*
- Correia, P. F., Fernandes, J. A. e Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- English, L. (1996). Children's problem posing and problem solving preferences, in J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Research in Early Number Learning*. Australian Association of Mathematics Teachers. English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 34, pp. 183-217.
- Estrada, A. e Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.
- Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *Intern. Statistical Review*, Vol 63, pp. 25-34
- Garfield, J. e Ahlgren, A. (1988) Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics. *Journal for Research in Mathem. Education*, Vol 19, No 1 , pp. 44-63
- Huerta, M.P. e Lonjedo, M.A. (2003) La resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller. VI Simposio SEIEM. Granada.
- Khazanov, L. (2005). An investigation of approaches and strategies for resolving students' misconceptions about probability in introductory college statistics. Unpublished doctoral dissertation, Teachers College, Columbia University.
- Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, Vol 3, No 1.
- Mayer, R. E. (1992) *Thinking, problem solving, cognition*. 2. ed. New York. Freeman and Co.
- Penalva, M. C., Posadas, J. A. e Roig, A. I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, Vol 2, No 3, pp. 23-54
- Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. New York, NY: Springer, pp. 191-214
- Perney, J. e Ravid, R. (1991) The relationship between attitudes toward statistics, math self-concept, test anxiety and graduate students' achievement in an introductory statistics course. Unpublished manuscript. Disponível em: <http://eric.ed.gov/?id=ED318607>
- Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*. Vol 14, No 1, pp. 19-28.
- Solórzano, L. S. (2014) Creación de problemas como recurso didáctico en cursos de matemática formal dirigidos a futuros profesores de matemática de secundaria. *Revista del CIDUI*, No 2.
- Stoyanova, E. e Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* pp. 518-525. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Yáñez, G. (2000) El Álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional, em Gómez, P., y Rico, L. (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 355-371.